IOI 2026 中国国家集训队集中培训

第二试

时间：2025 年 12 月 3 日 08:00 ∼ 13:00

题目名称	深红	小丑大师的荣耀	奇迹
题目类型	传统型	传统型	传统型
输入	标准输入	标准输入	标准输入
输出	标准输出	标准输出	标准输出
每个测试点时限	5.0 秒	2.0 秒	1.0 秒
内存限制	1024 MiB	1024 MiB	1024 MiB
子任务数目	6	6	10
测试点是否等分	否	否	是

深红（art）

【题目描述】

给定正整数 n, m, k 以及 $1 \sim k$ 的排列 p。

称一个大小为 $n \times m$，元素均为 $[1, k]$ 中的正整数的矩阵为一幅画。对于一幅画 A，定义 $A_{i,j}$ 为这个矩阵从上到下第 i 行，从左到右第 j 列的位置的值。

定义两幅画 A, B **相同**，当且仅当对于所有 $1 \le i \le n$，$1 \le j \le m$，均有 $A_{i,j} = B_{i,j}$。以下将两幅画 A, B 相同记作 $A = B$。

定义两幅画 A, B **相似**，当且仅当 A 进行若干次如下两种变换之一可以得到 B：

1. 将 A 的第一行移动至最后一行；
2. 将 A 的第一列移动至最后一列。

以下将两幅画 A, B 相似记作 $A \sim B$。

可以证明，二元关系相同和相似均构成等价关系。

对于一幅画 A，定义 $f(A)$ 也是一幅画，其中 $f(A)_{i,j} = p_{A_{i,j}}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$。

定义一幅画 A 是**优美的**，当且仅当 $f(A) \sim A$。

你需要回答以下两个问题：

1. 最多能选出多少幅优美的画，使得它们**互不相同**？
2. 最多能选出多少幅优美的画，使得它们**互不相似**？

由于答案可能较大，你只需要求出答案对 $998,244,353$ 取模后的结果。

【输入格式】

从标准输入读入数据。

输入的第一行包含三个正整数 n, m, k，表示画的大小与值域。

输入的第二行包含 k 个正整数 $p_1, p_2, \ldots, p_k$，表示给定的排列。

【输出格式】

输出到标准输出。

输出两行两个非负整数，分别表示最多能选出的**互不相同**与**互不相似**的优美的画的数量对 $998,244,353$ 取模后的结果。

本题包含两个小问，正确回答其中任意一个小问均可获得部分分数。具体评分规则请参见【评分方式】。

【样例 1 输入】

```
4 4 2
2 1
```

【样例 1 输出】

```
774
60
```

【样例 2 输入】

```
8 10 3
1 2 3
```

【样例 2 输出】

```
412733925
108590870
```

【子任务】

对于所有测试数据，均有：

- $1 \le n, m \le 10^3$，$1 \le k \le 10^6$；
- 对于所有 $1 \le i \le k$，$1 \le p_i \le k$，且 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ 是 $1 \sim k$ 的一个排列。

<table>
<tr><th>子任务编号</th><th>分值</th><th>$n, m \le$</th><th>特殊性质</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">5</td><td>16</td><td>$nm \le 16$ 且 $k \le 2$</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2">10^3</td><td>对于所有 $1 \le i \le k$，均有 $p_i = i$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15</td><td>$n = 1$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>20</td><td rowspan="2">50</td><td>$\gcd(n, m) = 1$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>40</td><td rowspan="2">无</td></tr>
<tr><td>6</td><td>15</td><td>10^3</td></tr>
</table>

【评分方式】

对于每个子任务：

- 正确回答所有测试数据的最多能选出的**互不相同**的优美的画的数量对 $998,244,353$ 取模后的结果，可获得该子任务 70% 的分数；
- 正确回答所有测试数据的最多能选出的**互不相似**的优美的画的数量对 $998,244,353$ 取模后的结果，可获得该子任务 30% 的分数。

注意：即使选手仅回答了其中一个问题，也需要按照输出格式输出两个整数，分别对应两个问题的答案。

小丑大师的荣耀（balatro）

【题目描述】

在小丑牌中达成成就「完美主义者 ++」后，伟大的 Balatro 贤者 Clonoth 决定考一考你对卡牌游戏的理解。

Clonoth 提出了以下问题：给定一个包含 n 张卡牌的牌堆，每张卡牌的正反面各写有一个 $[1,m]$ 中的正整数。你可以选择若干张卡牌，将其正反面翻转。对于 $1 \le l \le r \le m$，若存在一种翻转方式，使得翻转后 $[l,r]$ 中每个整数 i 都出现在至少一张卡牌的正面，则称区间 $[l,r]$ 是**可覆盖的**。形式化地，设第 i $(1 \le i \le n)$ 张卡牌的正反面上的正整数分别为 $a_{i,0}, a_{i,1}$，则 $[l,r]$ 是可覆盖的当且仅当存在一个长度为 n 的 01 串 s，满足对于所有 $l \le i \le r$，存在 $1 \le j \le n$ 满足 $a_{j,s_j} = i$。

由于牌堆在游戏中是动态变化的，Clonoth 设计了一个动态场景。具体地，初始时牌堆为空，即 $n = 0$，接下来 Clonoth 将会进行 q 次操作，每次操作是以下三种类型之一：

1. 插入卡牌：给定正整数 x, y $(1 \le x, y \le m)$，令 $n \leftarrow n+1$，然后向牌堆中插入一张编号为 n，正面为 x，反面为 y 的卡牌；
2. 移除卡牌：给定正整数 p $(1 \le p \le n)$，满足编号为 p 的卡牌当前仍在牌堆中，然后从牌堆中移除该卡牌；
3. 询问：给定正整数 s, t, u, v $(1 \le s \le t \le m,\ 1 \le u \le v \le m)$，你需要求出有多少个区间 $[l,r]$ 满足 $s \le l \le t$，$u \le r \le v$ 且 $[l,r]$ 是可覆盖的。

如果你能正确回答所有询问，Balatro 贤者 Clonoth 就会赠予你一个珍贵的护符——「小丑大师的荣耀」！

【输入格式】

从标准输入读入数据。

输入的第一行包含两个正整数 m, q，表示卡牌上的数字的范围和操作次数。

输入的第 $i+1$ $(1 \le i \le q)$ 行包含若干个正整数，表示第 i 次操作，其中第一个正整数 o 表示第 i 次操作的类型。

- 若 $o = 1$，则该行包含三个正整数 o, x, y，表示插入一张正面为 x，反面为 y 的卡牌；
- 若 $o = 2$，则该行包含两个正整数 o, p，表示移除编号为 p 的卡牌；
- 若 $o = 3$，则该行包含五个正整数 o, s, t, u, v，表示一次询问。

【输出格式】

输出到标准输出。

对于每次询问，输出一行一个非负整数，表示满足要求的区间数量。

【样例 1 输入】

```
8 10
1 6 5
3 2 3 8 8
1 3 3
1 4 5
3 2 6 6 8
1 1 2
2 4
1 2 5
3 1 3 2 7
3 2 3 2 3
```

【样例 1 输出】

```
0
2
8
3
```

【样例 2 输入】

```
9 17
1 6 6
3 1 1 3 3
1 5 1
1 3 4
2 2
1 9 9
1 2 2
1 7 9
2 4
1 2 3
3 1 7 3 3
1 8 6
1 7 5
```

```
3 6 9 9 9
1 4 5
2 3
3 3 5 2 9
```

【样例 2 输出】

```
0
2
4
16
```

【子任务】

对于所有测试数据，均有：

- $1 \le m, q \le 2 \times 10^5$；
- 对于每次操作，均有 $o \in \{1, 2, 3\}$，且给定的参数均满足【题目描述】中的限制。

<table>
<tr><th>子任务编号</th><th>分值</th><th>$m, q \le$</th><th>特殊性质</th></tr>
<tr><td>1</td><td>30</td><td>2000</td><td>无</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="5">2×10^5</td><td>A</td></tr>
<tr><td>3</td><td>BC</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">20</td><td>B</td></tr>
<tr><td>5</td><td>C</td></tr>
<tr><td>6</td><td>10</td><td>无</td></tr>
</table>

特殊性质 A：所有插入卡牌与移除卡牌的操作均在所有询问之前。

特殊性质 B：不存在移除卡牌的操作。

特殊性质 C：所有询问均满足 $s = t$ 且 $u = v$。

奇迹（miracle）

【题目背景】

日复一日的机械运作着，面前三色荧光单调排列，四周充满黑暗的压抑。将来更是一眼到头的坏结局。

完全地虚无。“充实”的机械耕耘无法撬动贫瘠的思想土壤，尽管所思所念仍然在不断创造“奇迹”，且毫无意义。

我所希望的奇迹究竟是什么？我认为应该是一个小概率事件的产生，对若干部分造成了影响，这些部分又相互联系，进而获得了宏观上的巨变。

一月复一月，黑暗在逐渐侵蚀希望。在几乎必然的绝望之下，我也只能祈望奇迹的光亮再次来临。

【题目描述】

冬雀发现，许多看似毫无关联的事物之间，总会产生一些奇迹般的联系。

一个奇迹可以使用 3×3 的矩阵 op 来表示，其中对于所有 $i, j \in \{0, 1, 2\}$，$op(i, j) \in \{0, 1, 2\}$。

对于 $0 \le i, j < 3^n$，设 i, j 的三进制表示分别为 $\overline{(i_{n-1} \dots i_1 i_0)_3}, \overline{(j_{n-1} \dots j_1 j_0)_3}$（不足 n 位的用前导 0 补齐），定义 $i \oplus j = \overline{(k_{n-1} \dots k_1 k_0)_3}$，其中 $k_l = op(i_l, j_l)$ $(0 \le l < n)$。

若 A, B, C 三个长度为 3^n 的非负整数序列之间，蕴含一个奇迹 op，那么对于所有 $0 \le i < 3^n$，均有 $C_i = \left(\sum_{j \oplus k = i} A_j \times B_k\right) \bmod p$，其中 $p = 998,244,353$。

冬雀希望他能够找到一些奇迹，来解释这些看似毫无关联的事物之间的联系。

尽管这对于任意三个序列难以进行，但它仍然可以轻易的找到两个**随机**的序列 A, B，并通过一些神奇的操作，给出序列 C，使得 A, B, C 三者内蕴含一个奇迹。

但是现在唯一的问题在于，它不知道奇迹是什么，所以它想让你找出一个可能的答案。

形式化地，给定三个长度为 3^n 的非负整数序列，其中对于所有 $0 \le i < 3^n$，A_i, B_i 均在 $[0, p)$ 中**独立均匀随机**生成，且存在 op 满足对于所有 $0 \le i < 3^n$，均有 $C_i = \left(\sum_{j \oplus k = i} A_j \times B_k\right) \bmod p$。你需要求出任意一个可能的 op。

【输入格式】

从标准输入读入数据。

本题包含多组测试数据。

输入的第一行包含一个正整数 t，表示测试数据组数。

接下来依次输入每组测试数据，对于每组测试数据：

- 第一行包含一个正整数 n。
- 第二行包含 3^n 个非负整数 $A_0, A_1, \dots, A_{3^n-1}$。

- 第三行包含 3^n 个非负整数 $B_0, B_1, \ldots, B_{3^n-1}$。
- 第四行包含 3^n 个非负整数 $C_0, C_1, \ldots, C_{3^n-1}$。

【输出格式】

输出到标准输出。

对于每组测试数据，输出一行九个非负整数 $op(0,0), op(0,1), op(0,2), op(1,0), op(1,1), op(1,2), op(2,0), op(2,1), op(2,2)$，表示一个可能的 op。若有多个满足条件的 op，**输出任意一个即可**。

【样例 1 输入】

```
3
1
2 0 2
1 0 0
2 2 0
2
0 0 1 1 1 2 0 0 2
1 0 0 2 1 0 1 2 2
10 10 6 8 5 2 8 9 5
3
0 0 0 1 0 1 1 1 1 2 2 2 2 1 0 2 2 0 0 0 1 1 0 2 1 0 2
2 2 1 2 2 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 2 0 0 2 1 1 1 0
70 0 81 0 0 0 124 0 105 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11 0 101 0 0 0 25 0 108
```

【样例 1 输出】

```
1 2 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 0 2 0 0 1 2
0 2 2 0 0 0 2 2 2
```

【子任务】

对于所有测试数据，均有：

- $1 \le t \le 16$；
- $1 \le n \le 10$；
- 对于所有 $0 \le i < 3^n$，A_i 均在 $[0, p)$ 中**独立均匀随机**生成；

- 对于所有 $0 \le i < 3^n$，B_i 均在 $[0, p)$ 中**独立均匀随机**生成；
- 对于所有 $0 \le i < 3^n$，$0 \le C_i < p$；
- 存在至少一个 op 满足条件。

测试点编号	$n \le$	特殊性质
1	1	无
2	3	
3	5	
4	10	A
5		B
6		C
7		D
8		E
9		F
10		无

特殊性质 A：存在 $x, y \in \{0, 1, 2\}$ 满足 $op = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ y & y & y \end{pmatrix}$。

特殊性质 B：存在 $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$ 满足 $op = \begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ z & z & z \end{pmatrix}$。

特殊性质 C：存在 $x, y \in \{0, 1, 2\}$ 满足 $op = \begin{pmatrix} x & x & y \\ x & x & y \\ y & y & y \end{pmatrix}$。

特殊性质 D：存在 $a, b \in \{0, 1, 2\}$ 满足对于所有 $i, j \in \{0, 1, 2\}$，均有 $op(i, j) = (ai + bj) \bmod 3$；

特殊性质 E：对于所有 $i \in \{0, 1, 2\}$，均有 $op(i, 0) = op(i, 1)$。

特殊性质 F：对于所有 $i, j \in \{0, 1, 2\}$，均有 $op(i, j) \in \{0, 1\}$。

【提示】

本题输入规模较大，请使用较为快速的输入方式。